Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase
2016
Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$.

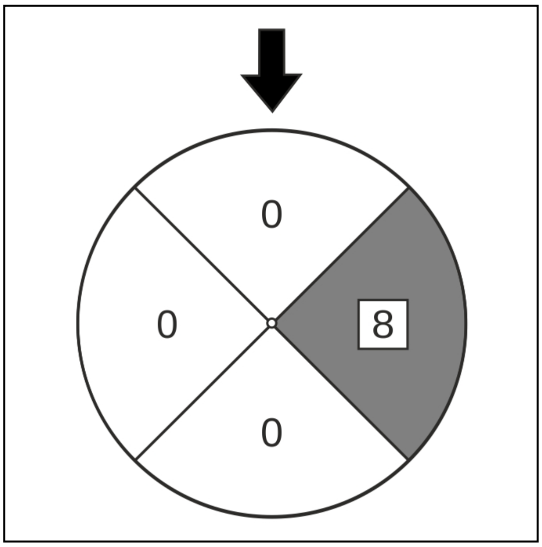
Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.

(6 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2: Stochastik

Beim Spiel „Die wilde 8“ wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe *Abbildung*) zweimal gedreht.



Abbildung

a) *Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.*

(2 Punkte)

b) Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich*

- *die Summe* 0 *ergibt,*
- *die Summe* 8 *ergibt,*
- *die Summe* 16 *ergibt.*

(2) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel „Die wilde 8“ beträgt 8 €.

- Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
- Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
- Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz ausgezahlt.

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei „fair“. Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1$.

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

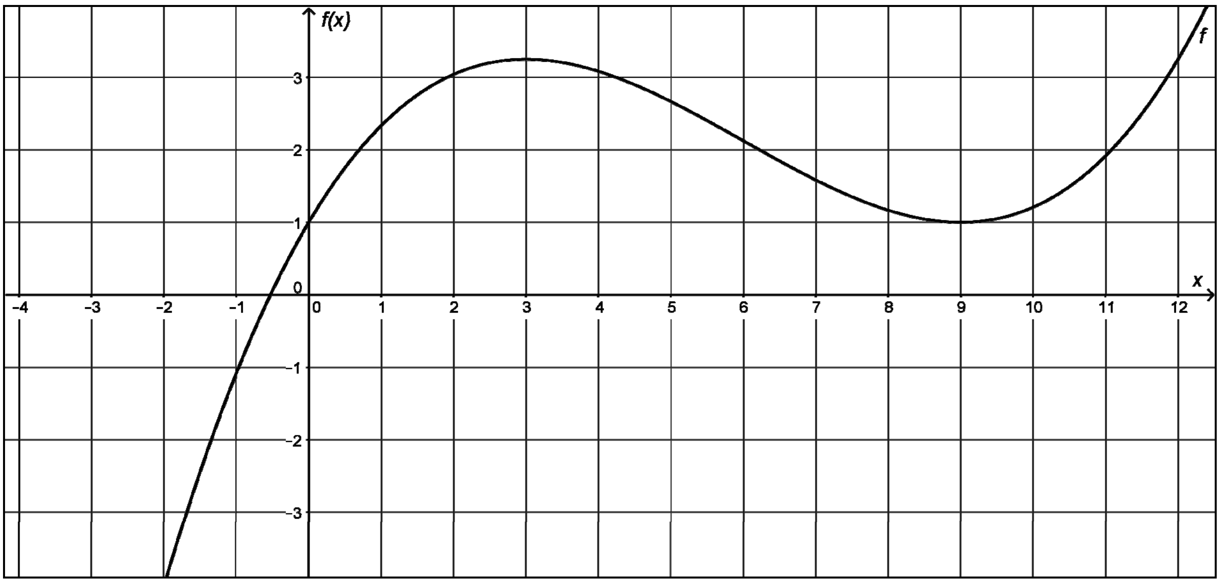


Abbildung 1

a) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte* $H\left(3 \middle| \frac{13}{4}\right)$ *und* $T(9|1)$.

[Zwischenergebnis: Die Gerade s hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.]

(2) Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen.

Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

(5 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung 1 ein.*

Der Graph der Funktion g geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion f hervor.

(2) *Geben Sie diese Transformation an.*

(3) *Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.*

(4 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Die folgenden *Abbildungen 2.1* bis *2.5* veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung $f'(2)$ näherungsweise ermitteln kann.

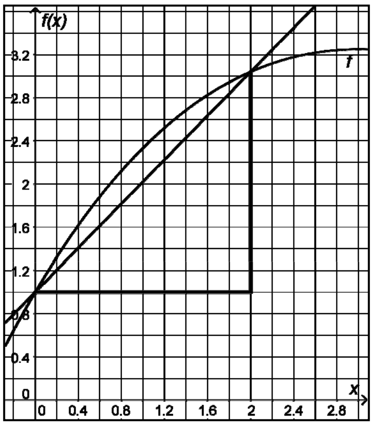


Abbildung 2.1

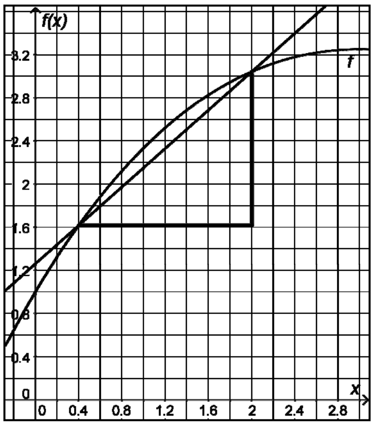


Abbildung 2.2

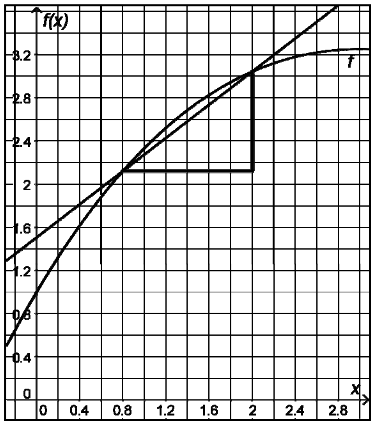


Abbildung 2.3

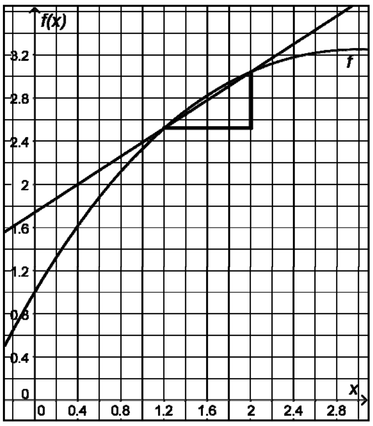


Abbildung 2.4

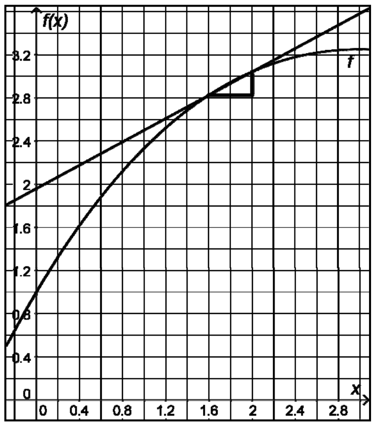


Abbildung 2.5

(1) *Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten* $\frac{f(2)-f(0,8)}{2-0,8}$ *gehört.*

(2) *Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert* $f'(2)$ *hat.*

Erklären Sie, warum in den Abbildungen 2.1 bis 2.5 veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

(2 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel α (siehe *Abbildung 1*), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht.

Heinz trägt seine Winkelmessungen in ein Koordinatensystem ein (siehe *Abbildung 2*).

Dabei entspricht $t = 0$ der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags, $t = 1$ entspricht 13:00 Uhr usw.

Der Uhrzeit 11:00 Uhr entspricht $t = -1$ usw.

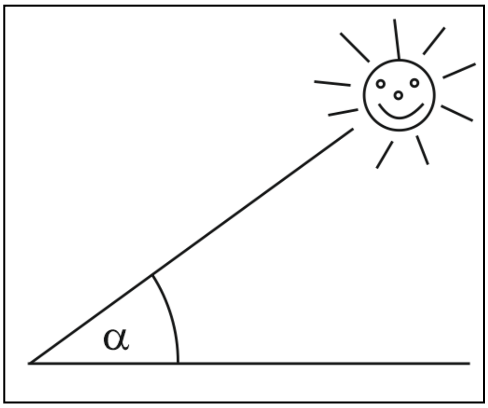


Abbildung 1

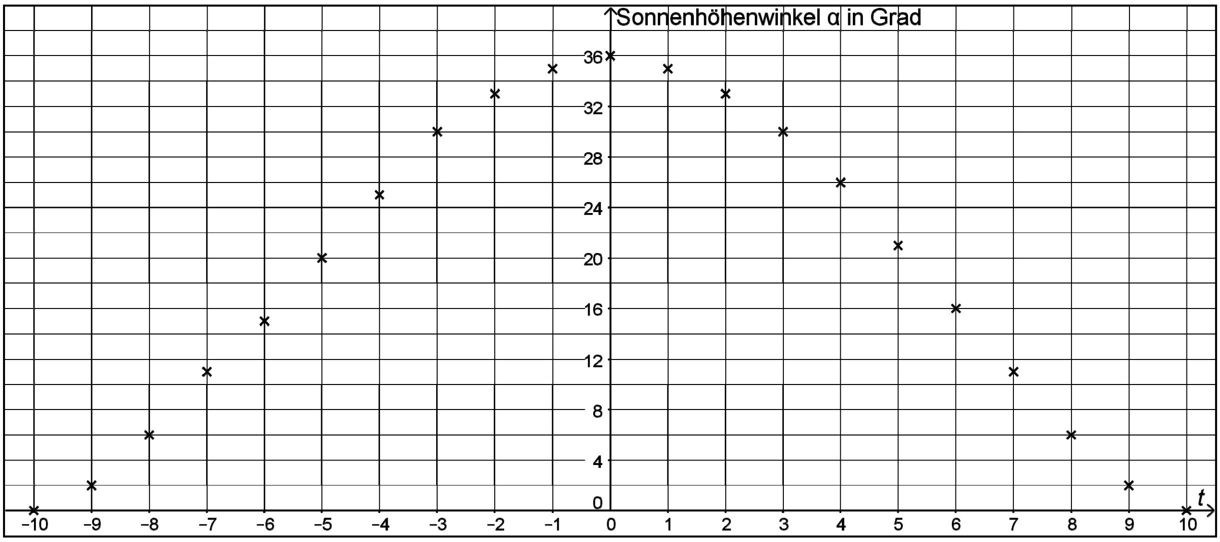


Abbildung 2

a) (1) *Geben Sie den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um* 7:00 *Uhr morgens misst.*

(2) *Geben Sie an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens* 30 *Grad betragen.*

(2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Heinz modelliert anhand seiner Daten den Sonnenhöhenwinkel im Laufe des Tages mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Er verwendet dazu für $-10 \le t \le 10$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0{,}0031 \cdot t^4 - 0{,}671 \cdot t^2 + 36{,}1 \ .$$

$f(t)$ beschreibt den Sonnenhöhenwinkel in Grad zu der durch t gegebenen Uhrzeit.

b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f ergeben, weichen etwas von den Werten aus der *Abbildung 2* ab.

Berechnen Sie die Abweichung zwischen dem um 7:00 *Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.*

(2 Punkte)

c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags (siehe *Abbildung 2*).

Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne zu diesem Zeitpunkt ihren höchsten Stand erreicht.

(7 Punkte)

d) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:* $f'(-9) > f'(-2)$.

(2) *Interpretieren Sie diese Ungleichung im Sachzusammenhang.*

(2 + 2 Punkte)

An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 04:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenhöhenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion g modellieren.

e) (1) *Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Verlauf eines möglichen Graphen von g.*

(2) Für die Funktionsgleichung von g wählt Heinz den Ansatz: $g(t) = a \cdot f(b \cdot t)$.

Ermitteln Sie für a und b jeweils einen zu seiner Messung passenden Wert.

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung